ÜBER EINEN WIDERSPRUCH IN EINEM BEWEIS DER ÜBERABZÄHLBARKEIT

K.-H.Wolff
c.Christian

ein Dialog

ÜBER EINEN WIDERSPRUCH IN EINEM BEWEIS DER ÜBERABZÄHLBARKEIT

(1) Der Beweis der Überabzählbarkeit der Dezimalzahlen zwischen 0 und 1 werde zwischen zwei Personen P_1 und P_2 diskutiert. P_1 hegt Zweifel an der Allgemeingültigkeit der CANTORschen Beweisführung, während P_2 den CANTORschen Standpunkt vertritt.

(2) Zunächst legt P_2 den CANTORschen Standpunkt folgendermaßen dar: Wären die Dezimalzahlen zwischen 0 und 1 abzählbar, dann könnten sie abzählbar angeordnet werden. Es sei

$$A: = a_1, a_2, a_3, \ldots a_n, \ldots\ldots$$

mit

$$a_n = 0'a_{n1}\ a_{n2} \ldots a_{nn} \ldots\ldots$$

eine derartige vollständige Anordnung aller Dezimalzahlen zwischen 0 und 1. Nun werde eine Dezimalzahl

$$b(A) = 0'b_1 b_2 \ldots b_n \ldots\ldots$$

mit $b_n = 1$ für $a_{nn} \neq 1$ und $b_n = 2$ für $a_{nn} = 1$ gebildet.
Wegen $\bigwedge_n a_{nn} \neq b_n$ gilt $\bigwedge_n b(A) \neq a_n$. Die Dezimalzahl $b(A)$ zwischen 0 und 1 ist also in der Anordnung A nicht enthalten und dies steht in Widerspruch zur behaupteten Vollständigkeit der Anordnung A.

(3) P_1 wendet zunächst ein, daß P_2 in (2) keine Dezimalzahlen zwischen 0 und 1 angeschrieben habe, sondern lediglich Symbole, wie $a_n = 0'a_{n1} a_{n2} \ldots$, und da doch unendliche Dezimalzahlen nicht vollständig in dieser Form angeschrieben werden können, solle P_2 erläutern, in welchem Sinn er die Symbole a_n verstanden wissen will.

(4) P_2 erwidert, jede reelle Zahl zwischen 0 und 1 könne beliebig genau durch eine endliche Dezimalzahl angenähert werden. Für die Definition von $b(A)$ sei es notwendig, die Dezimalzahl a_n bis zur n^{ten} Dezimalstelle a_{nn} zu berechnen. Dies sei jederzeit möglich und in diesem Sinn sei die Darstellung von a_n aus (2) zu verstehen.

Weiters gibt P_2 vier Beispiele an:

Beispiel 1: Endliche Dezimalzahl $a_n = 0'264$

$$\text{d.h. } a_{n1} = 2$$
$$a_{n2} = 6$$
$$a_{n3} = 4$$
$$\bigwedge_{m>3} a_{nm} = 0$$

Beispiel 2: Periodische Dezimalzahl $a_n = 0'333... = 0'\dot{3}$

$$\text{d.h. } \bigwedge_{m} a_{nm} = 3$$

Beispiel 3: Transzendente Zahl $a_n = \frac{1}{e} = \frac{1}{\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!}}$.

Auch hier kann a_{nm} für jedes endliche m berechnet werden.

Beispiel 4: Sonstige Zahl, wie etwa $a_{nm} = 1$, wenn $x^m + y^m = z^m$ in x, y und z ganzzahlig lösbar ist, $a_{nm} = 0$ sonst.

Hier ist a_{nm} zwar möglicherweise nicht für alle m berechenbar, aber wohl definiert und dies reicht nach Ansicht von P_2 für die Definition von b(A) aus.

(5) P_1 akzeptiert diese Erläuterung und führt zunächst den Begriff der Bildschirmmitteilung M ein. Eine Bildschirmmitteilung M vom Maß n^2 ist ein Quadrat der Seitenlänge $\frac{n}{10}$mm, das aus n^2 Elementarquadraten der Seitenlänge $\frac{1}{10}$mm, die in n Zeilen zu je n Elementarquadraten angeordnet sind, besteht. Jedes Elementarquadrat ist entweder weiß oder schwarz. Hiebei ist n eine beliebige Zahl aus der Menge der natürlichen Zahlen. Zu jedem n gibt es 2^{n^2} verschiedene Bildschirmmitteilungen. Offenbar können alle in schwarz-weiß gehaltenen schriftlichen Mitteilungen in der Form derartiger Bildschirmmitteilungen dargestellt werden. P_1 legt nun P_2 die Bildschirmmitteilungen

$$M := \boxed{0'1} \qquad \bar{M} := \boxed{0'25}$$

vor und fragt P_2, ob er die Behauptung, durch die Mitteilung $\overline{M}$ werde die Dezimalzahl null Ganze ein Zehntel und durch die Mitteilung $\overline{\overline{M}}$ werde die Dezimalzahl null Ganze fünfundzwanzig Hundertstel, also ein Viertel, dargestellt, bejahe.

(6) P_2 bejaht diese Frage.

(7) P_1 fordert P_2 auf, zu jeder vorgelegten Mitteilung M die Frage, ob durch M eine Dezimalzahl zwischen 0 und 1 dargestellt wird, mit "ja" oder mit "nicht ja" zu beantworten. Insbesondere solle P_2 die Frage für die Mitteilungen $\overline{M}$ und $\overline{\overline{M}}$ aus (5) mit "ja" beantworten.

(8) P_2 stimmt zu.

(9) P_1 ordnet nun die Bildschirmmitteilungen aus (5) an. Zunächst wird jeder Mitteilung M vom Maße n^2 eine n^2-stellige Zahl Z(M) wie folgt zugeordnet: Ist das r^{te} Elementarquadrat in der s^{ten} Zeile von M schwarz, so ist die $[n(s-1)+r]^{te}$ Stelle von Z(M) gleich 1, ist das genannte Elementarquadrat weiß, dann ist diese Stelle 2. Nun werden jene Bildschirmmitteilungen ausgewählt, für die P_2 auf die Frage, ob durch sie eine Dezimalzahl zwischen 0 und 1 dargestellt wird, im Sinne von (7) mit "ja" antwortet. Die so ausgewählten Mitteilungen M werden nach der Größe der zugeordneten Zahlen Z(M) angeordnet. Man erhält eine Anordnung A* genau jener Mitteilungen M, für die P_2 die Frage, ob durch M eine Dezimalzahl zwischen 0 und 1 dargestellt wird, mit "ja" beantwortet.

P_1 bildet nun eine Mitteilung M, bestehend aus einer Beschreibung der Anordnung A* und aus einer Beschreibung der Dezimalzahl b(A*) gemäß (2).

P_1 frage P_2, ob durch diese Mitteilung M eine Dezimalzahl zwischen 0 und 1 dargestellt wird.

(10a) P_2 verneint diese Frage. In diesem Fall ist ihm der Beweis der Unvollständigkeit von A* mißlungen, da er offenbar keine in A* nicht enthaltene Dezimalzahl nach CANTOR darstellen kann.

(10b) P_2 bejaht diese Frage.

(11) P_1 stellt fest, daß die Mitteilung M aus (9) eine Dezimalzahl darstellt, die in A* enthalten ist, da P_2 die entsprechende Frage bejaht hat. Es sei nun n(M) die Nummer dieser Mitteilung in der Anordnung A*. Durch M wird daher eine Dezimalzahl $b(A^*) = 0'b_1b_2...b_n.....$ dargestellt. Die n^{te} Dezimalstelle b_n von $b(A^*)$ ist aber wegen $b(A^*) = a_n$ gleich $b_n = a_{nn}$, während aus der Defintion von $b(A^*)$ nach (2) $b_n \neq a_{nn}$ folgt. Die Definition von $b(A^*)$ enthält daher einen Widerspruch. P_1 stellt fest, daß der Versuch von P_2, eine in A* nicht enthaltene Dezimalzahl zu konstruieren, um damit die Unvollständigkeit von A* zu zeigen, mißlungen ist. Die CANTORsche Beweisführung versagt also, wenn sie auf die Anordnung A* der Bildschirmmitteilungen im Sinne der Z. (5) bis (9) angewendet wird.

<u>Anmerkung:</u>

Die hier gewählte Methode der Anordnung mit Hilfe von Bildschirmmitteilungen muß nicht auf Dezimalzahlen zwischen 0 und 1 beschränkt bleiben. Sie kann in analoger Weise auf beliebige Zahlen oder Objekte angewendet werden. Insbesondere läßt sich mit ihrer Hilfe in jedem Beweis der Existenz überabzählbarer Mengen, der auf der Konstruktion eine in einer beliebigen Anordnung angeblich nicht enthaltenen Elementes beruht, ein Widerspruch nachweisen. Dieser Widerspruch ist jeweils in der Definition des neuen Elementes enthalten.

o. Universitätsprofessor
Dr. med. et Dr. phil.
Curt **CHRISTIAN**
Vorstand
des Institutes für Logistik
der Universität Wien
Honorarprofessor der TH Wien
A-1090 Wien, Universitätsstraße 10/2/II

Wien, 17. April 1974

Herrn
o. Prof. Dr. Karl H. Wolff
Direktor im
Hauptverband der österr. Sozialversicherungsträger
Traungasse 14 - 16
1030 W i e n

Sehr geehrter Herr Kollege Wolff!

Angeregt durch Ihr mir schriftlich mitgeteiltes Argument, das darauf abzielte zu zeigen, daß es mindest eine abzählbar unendliche Aufzählung a von reellen Zahlen aus $[0,1)$ gibt, für die die Cantorsche Behauptung

$\bigvee_b (b \in [0,1) \wedge \bigwedge_{n \in Nn} . a_{nn} = 1 \rightarrow b_n = 2 \dot{\wedge} a_{nn} \neq 1 \rightarrow b_n = 1.)$: entweder

nicht effektiv beweisbar oder aber widersprüchlich ist, und angeregt durch meine in Anwesenheit von Prof. Hornich geübte, z. T. auch schriftlich niedergelegte Kritik, daß durch ein mögliches dialogisches Verhalten von P_2 die aus Elementen von A' gebildete Aufzählung a bloß endlich sein könnte, sodaß a_{nn} gar nicht für jedes n definiert ist und im übrigen Ihr Argument eine Abart einer semantischen Paradoxie - beruhend auf dem Nichtunterscheiden der Dialogteile D_1 und D_2 - darstellt, habe ich folgende semantische Paradoxie konstruiert.

Die Cantorsche Bedingung möge durch 'C(a,x)' abgekürzt werden:

$$C(a,x) \Leftrightarrow \bigwedge_{n \in Nn} . a_{nn} = 1 \rightarrow x_n = 2 \dot{\wedge} a_{nn} \neq 1 \rightarrow x_n = 1.$$

'y ist durch die Formel A mit der freien Variablen x eindeutig definiert' sei erklärt durch:

$$Def(y,A(x)) \Leftrightarrow A(y) \wedge \bigwedge_x . A(x) \rightarrow x = y.$$

'Frm(A(x))' bedeute: A(x) ist eine Formel

Es möge folgende - wie sich später herausstellen wird - defizitäre Definition angesetzt werden:

$$M = \{y \mid y \in [0,1) \wedge \bigvee_A . Frm(A(x)) \wedge Def(y,A(x))\}$$

./2

Es sei vorausgesetzt, daß die zugrundeliegende Sprache, der die im Definiens für M involvierten Formeln angehören
1.) höchstens abzählbar unendlich viele Eigensymbole besitzt und
2.) elementar reell-zahlentheoretische Ausdrucksfähigkeit besitzt (sodaß sich etwa Dezimalfolgen bilden lassen wie 0'1, 0'11,..., $0'\underbrace{1\ldots1}_{k\text{ mal}},\ldots$).

Wegen 1.) ist die Menge der Formeln dieser Sprache von der Mächtigkeit der natürlichen Zahlen, daher die Menge der Formeln, die reelle Zahlen definieren und somit auch M höchstens von der Mächtigkeit der natürlichen Zahlen; wegen 2.) ist M mindestens von der Mächtigkeit der natürlichen Zahlen: $Nn \precsim M \precsim Nn$. Nach dem Satz von Schröder - Bernstein ist also die Menge der natürlichen Zahlen gleichmächtig mit M. Es gibt daher mindest eine bijektive Abbildung a von der Menge der natürlichen Zahlen auf M ($\bigvee_a Nn \underset{a}{\sim} M$).

Es sei nun folgendes Argument konstruiert:

$$z\in[0,1)\wedge C(a,z)\rightarrow z\in[0,1)\wedge Frm('x\in[0,1)\wedge C(a,x)')\wedge Def(z,'x\in[0,1)\wedge C(a,x)')$$

$$\rightarrow z\in[0,1)\wedge\bigvee_A.Frm(A(x))\wedge Def(z,A(x)).$$

$$\rightarrow z\in\{y|y\in[0,1)\wedge\bigvee_A.Frm(A(x))\wedge Def(y,A(x)).\}=M=wb\ a$$

$$\rightarrow\bigvee_{n\in Nn} a_n = z \wedge \mathrm{I}y] \quad \bigwedge_{n\in Nn} a_{n\,n} \neq z_n$$

$$\rightarrow\bigvee_{n\in Nn} a_{n\,n} = z_n \wedge a_{n\,n} \neq z_n.$$

$$\rightarrow \curlywedge$$

$$\neg\bigvee_z.z\in[0,1)\wedge C(a,z).\wedge\bigvee_z.z\in[0,1)\wedge C(a,z).$$

$$\curlywedge$$

Das vorstehende Argument stellt klarerweise eine semantische Paradoxie dar, d.h. einen auf einen Widerspruch führenden Paralogismus, der auf einer fehlenden Unterscheidung von Objekt- und Metasprache beruht.

Durch Unterscheidung der Objektsprache $\mathcal{L}$ und der zugehörigen Metasprache $\mathcal{L}'$ bzw. Metametasprache $\mathcal{L}''$ erhält man statt der obigen - wegen des Fehlens des Sprachbezuges (des Sprachindexes bei 'Frm') - defizitären Definition für M zunächst

./3

In der Sprache $\mathcal{L}'$ und auch in $\mathcal{L}''$ die Definition:

$$M = \{y \mid y \in [0,1) \wedge \bigvee_{A} . \mathrm{Frm}_{\underline{\mathcal{L}}}(A(x)) \wedge \mathrm{Def}(y, A(x)).\}$$

('$\mathrm{Frm}_{\mathcal{L}}(A(x))$' bedeutet: $A(x)$ ist eine Formel der Sprache $\mathcal{L}$ mit der freien Variablen x.)

In der Metametasprache $\mathcal{L}''$ läßt sich folgende analoge Definition aufstellen:

$$M' = \{y \mid y \in [0,1) \wedge \bigvee_{A} . \mathrm{Frm}_{\underline{\mathcal{L}'}}(A(x)) \wedge \mathrm{Def}(y, A(x))\}$$

Es möge vorausgesetzt werden, daß auch die Eigensymbole der Metasprache $\mathcal{L}'$ höchstens abzählbar unendlich viele Eigensymbole hat und elementare reell-zahlentheoretische Ausdrucksfähigkeit besitzt, sodaß gilt: $\bigvee_{a'} \mathrm{Nn} \underset{a'}{\sim} M'$

Das korrigierte Argument lautet dann in der Metametasprache $\mathcal{L}''$:

$$z \in [0,1) \wedge C(a,z) \rightarrow z \in [0,1) \wedge \mathrm{Frm}_{\underline{\mathcal{L}'}}(\text{'}x \in [0,1) \wedge C(a,x)\text{'} \wedge \mathrm{Def}(z, \text{'}x \in [0,1) \wedge C(a\,x)\text{'})$$

$$\rightarrow z \in \{y \mid y \in [0,1) \wedge \bigvee_{A} . \mathrm{Frm}_{\underline{\mathcal{L}'}}(A(x)) \wedge \mathrm{Def}(y, A(x))\} = M' [\neq M \quad \odot$$

$$\nrightarrow z \in M = \mathrm{wb}\ a$$

$\vdots$

$$\nrightarrow \lambda$$

sondern:

$$\rightarrow z \in M' = \mathrm{wb}\ a'$$

$$\rightarrow \bigvee_{n \in \mathrm{Nn}} a'_n = z$$

$$\rightarrow \bigvee_{n \in \mathrm{Nn}} a'_{nn} = z_n \wedge \mathrm{Hy}] \quad \bigwedge_{n \in \mathrm{Nn}} a_{nn} \neq z_n$$

$$\rightarrow \bigvee_{n \in \mathrm{Nn}} \underline{a'}_{nn} = z_n \wedge \underline{a}_{nn} \neq z_n$$

$$\nrightarrow \lambda$$

$\odot$ Da die Metasprache im allgemeinen ausdrucksreicher ist als die Objektsprache, kann aus $\mathrm{Nn} \underset{a}{\sim} M$ und $\mathrm{Nn} \underset{a'}{\sim} M'$ nicht geschlossen werden auf $M = M'$ bzw. $a = a'$ [analog: $\mathrm{Nn} \underset{p}{\sim}$ Ungerade Primzahlen, $\mathrm{Nn} \underset{u}{\sim}$ Ungerade Zahlen $\nrightarrow$ Ungerade Primzahlen = Ungerade Zahlen, $p = u$].

./4

Ich hoffe Ihnen, sehr geehrter Herr Kollege, durch das vorstehende (unkorrigierte) - eine semantische Paradoxie darstellende - Argument auch Ihr Argument weiter erhellt zu haben.

Mit kollegialer Hochachtung und lieben Grüßen

Ihr

P.S.: Ich sende das eben mitgeteilte Argument natürlich auch an Herrn Prof. Hörnich.

Ergänzung zu der Studie
"Über einen Widerspruch in einem Beweis der Überabzählbarkeit"

Variante I

Es wird P_2 zugebilligt, ein und dieselbe Mitteilung in verschiedenen Zeitpunkten unterschiedlich zu beurteilen, also in der Diskussion D_1 anders als in der Diskussion D_2. In diesem Falle ist es notwendig, auch den Zeitpunkt der Beurteilung der Mitteilung einzuführen. Dies geschieht durch folgende Erweiterung der Anordnung.

1. In der ursprünglichen Form (Punkt 9 der ersten Fassung) wird nur jenen Mitteilungen eine lediglich aus den Ziffern 1 und 2 bestehende Zahl zugeordnet, für die P_2 die Frage, ob durch sie eine Dezimalzahl zwischen 0 und 1 dargestellt wird, stets im gleichen Sinn beantwortet. Mitteilungen, bei welchen unterschiedliche Beantwortungen möglich sein sollen, werden folgendermaßen behandelt:
2. Der Mitteilung wird die gemäß Punkt 9 der ersten Fassung gebildete Zahl (bestehend aus den Ziffern 1 und 2) sowie der Zeitpunkt, in dem diese Mitteilung P_2 zur Beurteilung vorgelegt wird, zugeordnet. Der Zeitpunkt wird hiebei von einem beliebig fest gewählten Nullpunkt an in Einheiten von der Länge der Elementarzeit bemessen und in dem lediglich aus den Ziffern 1 und 2 bestehenden Zahlensystem dargestellt. Damit ist jedem Zeitpunkt eine aus den Ziffern 1 und 2 bestehende Zahl zugeordnet. Nunmehr wird jeder Mitteilung eine Zahl zugeordnet, deren vordere Stellen aus der den Zeitpunkt charakterisierenden Zahl gebildet werden, an die sich die Ziffer 3 anschließt, während die hinteren Stellen durch die der Mitteilung gemäß Punkt 9 der ersten Fassung zugeordnete Zahl gebildet werden:

3. Selbstverständlich kann P_2 auch mehrere Mitteilungen auf einmal beurteilen, also etwa sagen: "Ich stimme der Behauptung zu, daß alle endlichen Dezimalzahlen der Gestalt $0'a_1a_2\ldots a_n$ mit endlichem n Dezimalzahlen zwischen 0 und 1 sind".

4. Mit Hilfe der gemäß 2.) zugeordneten Zahl können wiederum alle Mitteilungen, durch die nach Aussage von P_2 eine Dezimalzahl zwischen 0 und 1 dargestellt wird, abzählbar angeordnet werden. Wie in der ersten Fassung ergibt sich nun für jene Mitteilung, welche eine Beschreibung dieser Anordnung und eine Beschreibung der Cantor'schen Dezimalzahl (Punkt 2 der ersten Fassung) enthält, ein Widerspruch, wenn P_2 irgendeinmal behauptet, daß diese Cantor'sche Dezimalzahl eine Dezimalzahl zwischen 0 und 1 sei.

Variante II

In dieser Variante wird angenommen, es gäbe ein Kriterium, wonach die Frage, ob durch eine Mitteilung eine Dezimalzahl zwischen 0 und 1 dargestellt wird, stets mit "ja", mit "nein" oder mit "weiß nicht" beantwortet wird. Gibt es ein solches Kriterium, dann kann seine Entscheidung an die Stelle der Antworten von P_2 in der ersten Fassung gesetzt werden und man folgert so weiter wie dort.

Um zu dem gewünschten Widerspruch zu gelangen genügt es, wenn das Kriterium im Falle der die Cantor'sche Dezimalzahl darstellenden Mitteilung nicht mit "weiß nicht" antwortet. Wäre dies aber der Fall, dann wäre die Cantor'sche Dezimalzahl nach dem Kriterium nicht mit Sicherheit eine Dezimalzahl zwischen 0 und 1, so daß man unter Zugrundelegung dieses Kriteriums den Beweis der Unvollständigkeit der Anordnung als mißlungen ansehen müßte.

o. Universitätsprofessor
Dr. med. et Dr. phil.
Curt CHRISTIAN
Vorstand
des Institutes für Logistik
der Universität Wien
Honorarprofessor der TH Wien
A-1090 Wien, Universitätsstraße 10/2/7

Wien, 22. April 1974

Herrn
o. Prof. Dr. Karl H. Wolff
Direktor im Hauptverband der österr. Sozialversicherungsträger
Kundmanngasse 14 - 14
1030 W i e n

Sehr geehrter Herr Kollege!

Offenbar haben sich unsere beiden Schreiben gekreuzt. Ich glaube, mich aufgrund meiner Note vom 17. April 1974 in der Beantwortung Ihrer Ergänzung zur Studie "Über einen Widerspruch in einem Beweis der Überabzählbarkeit" vom 16. April 74 kurz fassen zu können.

ad Variante I)

Die nunmehrige Definition für A* lautet zunächst in ihrer - wegen mangelnden Sprachbezuges - defizitären Form:

$$A^* = \{x \mid x \in [0,1) \wedge \bigvee_M . Mtlg(M) \wedge Def(M,x) \wedge \bigvee_t Bej(P_2, t, \bigvee_{x \in [0,1)} Def(M,x)).\}$$

(t ... Zeitvariable)

Nach Korrektur:

$$A^* = \{x \mid x \in [0,1) \wedge \bigvee_M . Mtlg_{\mathcal{L}}(M) \wedge Def(M,x) \wedge \bigvee_t Bej(P_2, t, \bigvee_{x \in [0,1)} Def(M,x)).\}$$

Es sei folgende Abkürzung vereinbart:

'...' für '$a \in A^{*\aleph_0} \wedge b \in [0,1) \wedge C(a,b)$' mit $C(a,b) \Leftrightarrow \bigwedge_{n \in N_n} a_{nn} = 1 \rightarrow b_n = 2 \wedge a_{nn} \neq 1 \rightarrow b_n =$

(Da in der Definition von A* ein Bezug auf die Sprache $\mathcal{L}$ vorliegt, gehört die Mitteilung '...' der Metasprache $\mathcal{L}'$ an.)

P_1 kann nun schon nach endlich vielen Schritten (also im früheren 1. Dialogteil) die Gretchenfrage stellen:

Wird durch '...' ein x aus [0,1) definiert?

Angenommen, P_2 bejaht nicht. P_2 kommentiert sein Schweigen damit, daß er die gestellte Frage deswegen nicht bejahen, aber - falls dies den Dialogregeln entspräche - auch nicht verneinen könne,

./2

weil sie für ihn sinnlos sei. Der in der Frage involvierte Teilsatz '$\bigwedge_{n \in Nn} a_{nn} = 1 \rightarrow b_n = 2 \wedge a_{nn} \neq 1 \rightarrow b_n = 1$' sei derzeit sinnlos, weil gar nicht feststehe, ob a_{nn} überhaupt definiert sei, es hänge schließlich von seinem eigenen dialogischen Verhalten ab, ob die aus Elementen von A' gebildete Aufzählung a überhaupt unendlich abzählbar sei, dann erst sei a_{nn} für jedes n definiert. Wäre ihm, dem P_2 die Frage in hypothetischer Form gestellt worden: "Wenn $a \in A'^{Nn}$, ist dann '...' eine Mitteilung, durch die ein x aus [0,1) definiert wird?", so hätte er bejahend antworten können. Er weist daher die Feststellung von P_1, es sei P_2 nicht gelungen, für die Aufzählung a eine Diagonalzahl zu definieren, entschieden zurück, da er, P_2 lediglich behauptet hätte, daß er für eine jede abzählbar unendliche Folge eine Diagonalzahl angeben könne.

Einer solchen Situation kann man jedoch durch Modifikation der Dialogeintrittsbedingung begegnen: Statt in den Dialog erst dann einzutreten, wenn P_2 zugesichert hat, daß die Bildschirmmitteilungen $\boxed{0'1}$ und $\boxed{0'2}$ Mitteilungen für reelle Zahlen aus [0,1) sind, möge man als Dialogeintrittsbedingung das Zugeständnis von P_2 nehmen, daß jede Bildschirmmitteilung der Form $\boxed{0'a_1,...,a_n}$ (mit endlicher Anzahl von dekadischen Ziffern $a_1,...,a_n$) eine reelle Zahl aus [0,1) mitteilt. Dann steht schon vor dem Dialogbeginn fest, daß es eine abzählbar unendliche Aufzählung a von Elementen aus A' gibt ($\bigvee_a a \in A'^{Nn}$). Dann ist die schon nach endlicher Schrittzahl gestellte Gretchenfrage sinnvoll. Bejaht dann P_2 die Frage, ob durch '...' eine Zahl x aus [0,1) definiert sei, so gilt:

$$a \in A'^{Nn} \wedge b \in [0,1) \wedge C(a,b) \rightarrow b \in [0,1) \wedge Mtlg_{\not\in}('...') \wedge \bigvee_t Bej(P_2, t, \bigvee_x Def('...', x)).$$

$\nrightarrow \perp$ siehe Note vom 17. April 1974

ad Variante II) $C_2 K$

Das Kriterium K wird natürlich derart sein, daß es die von mir eben vorgeschlagene Dialogeintrittsbedingung erfüllt; es steht also schon a priori fest, daß $\bigvee_a a \in A'^{Nn}$.

d) Bejaht das Kriterium die Frage, ob durch '...' eine Zahl x aus [0,1) definiert sei, gilt genau das gleiche wie eben gesagt: es folgt bei Vermeidung defizitärer Definitionen und strenger Scheidung von Objekt- und Metasprache kein Widerspruch.

./3

β) Verneint das Kriterium (K) die Frage, ob durch '...' eine Zahl x aus [0,1] definiert sei, gilt:

$$\mathrm{Vern}(K, \bigvee_x \mathrm{Def}('...', x)) \rightarrow a \in A^{*\omega} \wedge b \in [0,1) \wedge C(a,b) \rightarrow \bigvee_x \mathrm{Def}('...', x) \wedge \neg \bigvee_x \mathrm{Def}('...'$$

$$\rightarrow \bigvee_b . \qquad\qquad . \rightarrow \curlywedge$$

$$\rightarrow \neg \bigvee_b . a \in A^{*\omega} \wedge b \in [0,1) \wedge C(a,b).$$

$$\bigvee_b . a \in A^{*\omega} \wedge b \in [0,1) \wedge C(a,b). \rightarrow \neg \mathrm{Vern}(K, \bigvee_x \mathrm{Def}('...', x))$$ (ein unbedenklicher Sachverhalt)

Abschließend möchte ich meine Auffassung zu der Studie "Über einen Widerspruch in einem Beweis der Überabzählbarkeit" so zusammenfassen: Auch durch die Erweiterungen in Variante I) und II) ist kein echter Widerspruch in der Behauptung

$$\bigwedge_a . a \in [0,1)^{\omega} \rightarrow \bigvee_{x \in [0,1)} C(a,x) \wedge \bigwedge_{n \in N_n} a_n \neq x.$$

aufgewiesen worden. Es handelt sich auch bei der revidierten Fassung des Argumentes eindeutig um eine (nach revidierter Dialogeintrittsbedingung) dialogische Version der in meiner Note vom 17. April 1979 dargestellten "Semantischen Paradoxie der Cantorschen Diagonalzahlen", die übrigens in Analogie zur Richardschen Paradoxie, die ich "Semantische Paradoxie der zahlentheoretischen Diagonalfunktionen" nenne, steht.
Man erhält diese Paradoxie sowie deren Auflösungen, indem man in meiner Darstellung folgende Ersetzungen an allen Stellen des Vorkommens durchführt - (∥ bedeutet: zu ersetzen durch) - :

1.) $x \in [0,1) \parallel \mathrm{Func}_{N_n}(z)$ [z ist eine Funktion über der Menge der natürlichen Zahlen]

2.) $C(a,x) \parallel \bigwedge_{n \in N_n} x(n) = a_n(n)'$ [der Wert der Funktion x für das Argument n ist gleich dem Nachfolger des Wertes, den die Funktion a_n für das Argument n annimmt]

3.) $a_{n\,n} \parallel a_n(n)$ bzw. $a'_{n\,n} \parallel a'_n(n)$

./4

4.) Die Sprache ($\mathcal{L}$) ($\mathcal{L}'$) ... besitzt

1.) elementar reell-zahlentheoretische Ausdrucksfähigkeit	// 2.) elementar zahlentheoretische Ausdrucksfähigkeit (sodaß sich etwa Funktionenfolgen bilden lassen: $x+0, x+1, \dots x+k, \dots$)

[auch hier folgt aus $\bigwedge_{n \in \mathbb{N}n} x(n) = a_n(n)'$: $\bigwedge_{n \in \mathbb{N}n} x(n) \neq a_n(n)$].

Mit dem Ausdruck der kollegialen Hochachtung

und freundlichen Grüßen

Ihr [illegible]

18. III. 1994: Jeder Übergang von (X) → ($\mathcal{L}'$) erfordert endliche Zeit. Es kann daher nur endlich viele Sprachen (Metasprachen, Meta-Meta-Sprachen u.s.w.) geben. Sie alle sind in Bildschirm-mitteilungen enthalten! Jede BSM wird erst durch ihre Interpretation durch eine Person zu einem Teil einer der Person wohl bekannten Sprache.